Kako su oba sabirka na desnoj strani nejednakosti integrabilna (jer $f \in L^p(X)$ i $g \in L^q(X)$) sledi da je i fg integrabilna funkcija tj. $fg \in L^1(X)$. Šta više,

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p\|g\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

odakle direktno sledi Helderova nejednakost.

b) Sledi iz a) za $p = q = 2$.

c) Kako $f, g \in L^p(X)$, važi: $\mid f+g \mid^p \leq (2\max\{\mid f \mid, \mid g \mid\})^p \leq 2^p(\mid f \mid^p + \mid g \mid^p)$. Dakle, $\int_X \mid f+g \mid^p \, d\mu < +\infty$, pa $f+g \in L^p(X)$. Ostaje još da se pokaže nejednakost trougla. Važi

$$\begin{aligned} \mid f+g \mid^p &= \mid f+g \mid \cdot \mid f+g \mid^{p-1} \leq (\mid f \mid + \mid g \mid) \mid f+g \mid^{p-1} \\ &= \mid f \mid \cdot \mid f+g \mid^{p-1} + \mid g \mid \cdot \mid f+g \mid^{p-1}. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Kako $f+g \in L^p(X)$, tada $\mid f+g \mid^p \in L^1(X)$. Dalje, iz $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ sledi da je $p+q = pq$, odnosno $p = (p-1)q$. Otuda $\mid f+g \mid^{p-1} \in L^q(X)$. Primenjujući Helderovu nejednakost na funkcije f i $\mid f+g \mid^{p-1}$ dobijamo

$$\int_X \mid f \mid \cdot \mid f+g \mid^{p-1} \, d\mu \leq \|f\|_p \cdot (\int_X \mid f+g \mid^{(p-1)q} \, d\mu)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}.$$

Analogno, $\int_X \mid g \mid \mid f+g \mid^{p-1} \, d\mu \leq \|g\|_p \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}$. Integraleći nejednakost (8.3) dobijamo

$$\begin{aligned} \|f+g\|_p^p &\leq \|f\|_p \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}} + \|g\|_p \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}} \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}} \end{aligned}$$

odnosno

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

■

Teorema 8.1. Prostor $(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ je kompletan.

Dokaz:

Neka je $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ proizvoljan Košijev niz u $L^p(X)$. To znači da za

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n(\varepsilon) \in \mathbf{N})(\forall m, n \geq n(\varepsilon)) \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon, \tag{8.4}$$

odnosno $\int_X \mid f_n - f_m \mid^p \, d\mu < \varepsilon^p$. Iz (8.4) sledi da postoji podniz $(g_k)_{k \in \mathbf{N}}$ niza $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ takav da je $\|g_{k+1} - g_k\| < \frac{1}{2^k}, k \in \mathbf{N}$. Definišimo funkciju g na sledeći način:

$$g(x) = \mid g_1(x) \mid + \sum_{k=1}^{\infty} \mid g_{k+1}(x) - g_k(x) \mid$$